

**„Podążamy tymi samymi  
lub podobnymi drogami myślowymi”  
Tematyka korespondencji logicznej  
Gottloba Fregego  
z Giuseppem Peanem, Davidem Hilbertem  
i Bertrandem Russellem**

*Pamięci Kasi i Leszka Niebrojów*

Prace Naukowe



Uniwersytetu Śląskiego  
w Katowicach  
nr 3852

Gabriela Besler

**„Podążamy tymi samymi  
lub podobnymi drogami myślowymi”  
Tematyka korespondencji logicznej  
Gottloba Fregego  
z Giuseppem Peanem,  
Davidem Hilbertem  
i Bertrandem Russellem**

**Redaktor serii: Filozofia**

Dariusz Kubok

**Recenzenci**

Jerzy Pogonowski

Jerzy Dadaczyński

# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>7</b>
<b>1. Zagadnienia wstępne</b>	<b>15</b>
1.1. Podstawowe założenia filozoficzne Gottloba Fregego . . . . .	15
1.1.1. Logicyzm . . . . .	15
1.1.2. Sens [ <i>Sinn</i> ] i znaczenie [ <i>Bedeutung</i> ] wyrażen językowych . .	20
1.1.3. Adekwatny i rozłączny podział na pojęcia oraz przedmioty .	21
1.2. Podstawy notacji logicznej Fregego, Peana i Russella . . . . .	25
1.2.1. Notacja Fregego . . . . .	27
1.2.2. Notacja Peana . . . . .	34
1.2.3. Notacja Russella . . . . .	38
<b>2. Korespondencja z Giuseppem Peanem</b>	<b>41</b>
2.1. Ogólnie o korespondencji . . . . .	41
2.2. Wzajemna znajomość tekstów i cytowania . . . . .	44
2.3. Zachowane listy i ich tematyka . . . . .	47
2.4. Symbolizm logiczny i liczba znaków pierwotnych . . . . .	50
2.5. Kwantyfikator ogólny i kwantyfikator szczegółowy, zdania ogólne i zdanie szczegółowe . . . . .	55
2.6. Zapis wybranych formuł logicznych . . . . .	62
2.7. Definicje operacji matematycznych i warunki poprawności definicji	64
2.8. Kalendarium współpracy Fregego z Peanem . . . . .	71
<b>3. Korespondencja z Davidem Hilbertem</b>	<b>75</b>
3.1. Ogólnie o korespondencji . . . . .	75
3.2. Wzajemna znajomość tekstów i cytowania . . . . .	77
3.3. Zachowane listy i ich tematyka . . . . .	78
3.4. Ogólna koncepcja geometrii . . . . .	80
3.5. Struktura i elementy systemu geometrii . . . . .	87
3.6. Rozumienie aksjomatu i jego rola w systemie geometrii . . . . .	92
3.7. niesprzeczność i niezależność aksjomatów . . . . .	95
3.8. Fraza „istnieje” [ <i>es gibt</i> ] . . . . .	99

3.9. Symbolizm logiczny i matematyczny . . . . .	102
3.10. Kalendarium współpracy Fregego z Hilbertem . . . . .	103
<b>4. Korespondencja z Bertrande Russelllem</b>	<b>107</b>
4.1. Ogólnie o korespondencji . . . . .	107
4.2. Wzajemna znajomość tekstów i cytowania . . . . .	108
4.3. Zachowane listy i ich tematyka . . . . .	109
4.4. Możliwość skonstruowania antynomii . . . . .	110
4.5. Inne przypadki antynomii . . . . .	119
4.6. Jak należy rozumieć klasę? . . . . .	121
4.7. Podstawowa forma funkcji i dziedzina funkcji . . . . .	126
4.8. Próby wyeliminowania antynomii . . . . .	130
4.9. Argumenty za odróżnieniem sensu od znaczenia . . . . .	136
4.10. Kalendarium współpracy Fregego z Russellem . . . . .	137
<b>Zakończenie</b>	<b>141</b>
<b><i>Appendix: Chronologiczny układ wszystkich odnalezionych listów naukowych Fregego</i></b>	<b>145</b>
<b>Uwagi terminologiczne</b>	<b>149</b>
<b>Wykaz skrótów</b>	<b>151</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>153</b>
Bibliografia podmiotowa . . . . .	153
Gottlob Frege . . . . .	153
Publikacje książkowe Fregego . . . . .	153
Pośmiertne wydania tekstów Fregego . . . . .	154
Artykuły i recenzje Fregego publikowane za życia . . . . .	155
Teksty Fregego niepublikowane za życia . . . . .	156
Giuseppe Peano . . . . .	157
David Hilbert . . . . .	158
Bertrand Russell . . . . .	159
Korespondencja Gottloba Fregego . . . . .	161
Bibliografia przedmiotowa . . . . .	166
<b>Indeks osobowy</b>	<b>179</b>
<b>Indeks rzeczowy</b>	<b>183</b>
<b>Summary</b>	<b>189</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>191</b>

## Wstęp

Gottlob Frege (1848–1925) – filozof, logik i matematyk niemiecki – istotnie wpłynął na kształt filozofii dwudziestego wieku, wyznaczając kierunek rozwoju filozofii analitycznej, która kształtowała się także w Polsce. Od stu lat dorobek naukowy Fregego cieszy się dużym zainteresowaniem w środowisku filozoficznym, językoznawczym, matematycznym i naukoznawczym. Z wykształcenia Frege był matematykiem, ale na przyszłe pokolenia bardziej oddziałał jako logik, badacz języka i filozof. Pracował na Uniwersytecie Friedricha Schillera w Jenie (Friedrich-Schiller-Universität) przez 44 lata. Wiodącym zadaniem, jakie realizował, było badanie podstaw matematyki, a nie uprawianie matematyki jako takiej, chociaż wykłady uniwersyteckie prowadził głównie z matematyki<sup>1</sup>.

W Fregego *Wissenschaftlicher Briefwechsel* zamieszczono korespondencję Fregego z wielkimi matematykami jego epoki: Bertrande Russelliem (1872–1970), Davidem Hilbertem (1862–1943) i Giuseppe Peanem (1858–1932), prowadzoną w latach 1891–1912. Prócz tu wymienionych znajduje się tam także korespondencja z innymi ważnymi matematykami: Louise Couturatem (1868–1915), Hugonem Dinglerem (1881–1954), Philipem Jourdainem (1879–1919), Heinrichem Liebmannem (1874–1939), synem niemieckiego neokantysty Ottona Liebmana (1840–1912), kolegi Fregego z uniwersytetu w Jenie, z Moritzem Paschem (1843–1930) i Giovannim Vailatim (1863–1909). Zamieszczono tam także wymianę listów z filozofami, uczniami Franza Brentana (1838–1917): Edmundem Husserlem (1859–1938) i Antonym Martym (1847–1914), oraz z neokantystą Richardem Hönlwaldem (1875–1947). Osobno wydano listy do Ludwiga Wittgensteina (1889–1951).

---

<sup>1</sup> Spis wykładów uniwersyteckich Fregego zob. L. KREISER: *Gottlob Frege. Leben – Werk – Zeit*. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 2001, s. 280–284.

Chociaż główną inspiracją do prowadzenia korespondencji były dla Fregego jego badania nad podstawami matematyki, to listy pisane przez niego i do niego należą także do dziedzictwa humanistyki europejskiej, ponieważ cechują się literackim językiem, zawierają małe traktaty na wielkie tematy filozoficzno-logiczne (czym są prawda, klasa, liczba itd.) i zaowocowały powstaniem teorii, które miały decydujący wpływ na kształt dwudziestowiecznej humanistyki, w szczególności semiotyki<sup>2</sup>. Pokazują także społeczno-naukowe tło narodzin logiki matematycznej dwudziestego wieku, zawierają pytania towarzyszące powstawaniu tej dziedziny nauki, a podawane rozwiązania podlegają w nich wnikliwej analizie.

Bardzo wiele doniosłych wątków naukowych przewinęło się w listach pisane do i przez Fregego. Nie wszystkie one zostały dotąd należycie zbadane. Celem niniejszej monografii jest zreferowanie niektórych spośród tematów diskutowanych listownie z Russellem, Hilbertem i Peanem.

Korespondencja zamieszczona w Fregego *Wissenschaftlicher Briefwechsel* ma wielkie znaczenie zarówno dla filozofii, jak i historii logiki czy matematyki. Powszechnie wiadomo, że korespondencja z Russellem doprowadziła do odkrycia antynomii w systemie logicznym Fregego. Ale wymiana listów z Fregem to między innymi także:

1. Pierwsze sformułowanie teorii typów w korespondencji z Russellem.
2. Podany przez Hilberta przykład pewnego systemu rzeczy: miłość, prawo, kominiarz, obrazujący formalne rozumienie geometrii.
3. Wciąż aktualne pytania Fregego dotyczące pierwszych zdań *Tractatus logico-philosophicus* Wittgensteina.
4. Jedyne pełne sformułowanie przez Fregego zasady składalności (kompozycjalności) dotyczącej wyrażeń językowych.
5. Świadectwo wczesnego odkrycia (przez korespondentów Fregego) walorów filozoficznych tekstów Fregego.

Te listy pokazują subtelne przenikanie się zagadnień matematycznych, logicznych i filozoficznych, których nie da się (przynajmniej czasami) rozdzielić. Lektura korespondencji Fregego ukazuje go jako naukowca i człowieka cenionego w czasach jemu współczesnych, co znacznie odbiega od stereotypowego portretowania tego filozofa z Jeny.

---

<sup>2</sup> Semiotykę traktuję tu jako dziedzinę szerszą niż filozofia języka i tym samym przyjmuję, że Frege w swych badaniach językowych wychodził poza filozofię języka. Zdaje sobie sprawę z dyskusyjności takiego stanowiska.



Cytat z listu do Russella, będący częścią tytułu monografii: „Podążamy tymi samymi lub podobnymi drogami myślowymi”<sup>3</sup>, dobrze określa specyfikę tej korespondencji, a co za tym idzie, jej wymowę. To próba zbliżenia stanowisk z racji wspólnych tematów badawczych, wśród których są poszukiwanie podstaw matematyki i eliminacja każdego przejawu nieścisłości w tej dziedzinie. Korespondencja pokazuje, że granicę prowadzonych dyskusji wyznaczały przyjmowane założenia filozoficzne. To była granica, której Frege nawet nie próbował przekroczyć, w tym sensie pozostawała ona granicą bezwzględną. Russell, Hilbert czy Peano wychodzili z innych założeń filozoficznych. Dodam, że matematycy przedstawiani w mojej monografii byli uczestnikami wielkich wydarzeń naukowych tamtej epoki: kongresu filozoficznego i kongresów matematyków<sup>4</sup>, co także pokazuje przenikanie się myśli filozoficznej i matematycznej. Peano brał udział w pierwszym kongresie matematyków w 1897 roku w Zurychu<sup>5</sup>. Peano z Russellem uczestniczyli w pierwszym kongresie filozoficznym w 1900 roku w Paryżu<sup>6</sup>, a także w odbywającym się tamże zaraz po nim drugim kongresie matematyków<sup>7</sup>. Couturat zaprosił Fregego na kongres filozoficzny, ale ten zaproszenia nie przyjął. Zgodził się jednak należeć do komitetu sponsorów tego kongresu<sup>8</sup>.

<sup>3</sup> Frege an Russell, 28.12.1902. In: G. FREGE: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hrsg., bearb., eingel. und mit Anm. versehen von G. GABRIEL, H. HERMES, F. KAMBARTEL, Ch. THIEL, A. VERAART. Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1976, s. 237. Przy następnych odwołaniach do tego zbioru listów posłużyć się skrótem WB. Peano w liście do Fregego wyraził się podobnie: „[...] podążamy jedną drogą naukową” (Peano an Frege, 30.01.1894. Tłum. M. PLES-BĘBEN. WB, s. 178). Wszystkie fragmenty z korespondencji Fregego z Hilbertem i Russellem przetłumaczył z niemieckiego Andrzej Painta. Inni tłumacze są wymienieni w tekście. Tłumaczenia opracowały naukowo Gabriela Besler oraz Joanna Zwierzyńska. Słowa dodane w cytatach z korespondencji Fregego w nawiasach kwadratowych zostały dopisane w czasie naukowego opracowywania tekstu. W ramach grantu nr 0407/NPRH5/H22/84/2017 Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego przygotowywane jest wydanie pełnej korespondencji Gottloba Fregego, które ukaże się w 2020 roku w Wydawnictwie Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach pod tytułem *Korespondencja Gottloba Fregego. Wydanie krytyczne*.

<sup>4</sup> Zob. sprawozdania z kongresów: E.O. LOVETT: *Mathematics at the International Congress of Philosophy. Paris 1900*. „Bulletin of the American Mathematical Society” 1901, vol. 7, no. 4, s. 157–183. <https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183416497> [dostęp: 06.03.2017]; Ch.A. SCOTT: *The International Congress of Mathematicians in Paris*. „Bulletin of the American Mathematical Society”. <http://www.ams.org/journals/bull/1900-07-02/S0002-9904-1900-00768-3/S0002-9904-1900-00768-3.pdf> [dostęp: 25.02.2017]. Materiały pokonferencyjne wszystkich kongresów matematyków znajdują się na stronie International Mathematical Union. <https://www.mathunion.org/icm/proceedings> [dostęp: 14.02.2018].

<sup>5</sup> Internationaler Mathematiker-Kongress, Zürich, 9–11.08.1897.

<sup>6</sup> Congres International de Philosophie, Paris, 1–5.08.1900.

<sup>7</sup> Congres International des Mathématiciens, Paris, 6–12.08.1900.

<sup>8</sup> Couturat an Frege, 1.07.1899. WB, s. 17–18.

W czasie trzeciego kongresu matematyków, który odbywał się w 1904 roku w Heidelbergu, Hilbert omówił wady i zalety logicyzmu<sup>9</sup>. Frege otrzymał także zaproszenie od Russella na czwarty kongres matematyków, do Cambridge, ale też się tam nie wybrał<sup>10</sup>.

Omówiona tu korespondencja przypadała na okres szczytowego rozwoju naukowego Fregego. W 1879 roku opublikował on swą pierwszą książkę, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formalsprache des reinen Denkens* (dalej: BS), w której pokazał logiczne narzędzia indukcyjnego zdefiniowania liczby, a przy okazji przedstawił rachunek zdań i rachunek predykatów. W 1884 roku ukazała się druga książka, *Die Grundlagen der Arithmetik*, gdzie posługując się językiem naturalnym i bez symbolizmu logicznego, przedstawił inny sposób definiowania liczby, oparty na równoliczności zakresów pojęć. W pierwszej połowie lat dziewięćdziesiątych dziewiętnastego wieku korespondował z Husserlem i Peanem oraz opublikował cykl tekstów poświęconych semiotyczno-filozoficznym podstawom swego logicyzmu. W 1893 roku wydał pierwszy tom następnej pozycji, *Grundgesetze der Arithmetik* (dalej: GG), w której przedstawił kolejny logiczny sposób definiowania liczby, z odwołaniem do „przebiegu wartości funkcji” (termin techniczny Fregego, wyjaśniony w rozdziale 1.). Dziesięć lat później, w 1903 roku, gdy drugi tom GG był już na maszynach drukarskich, po liście od Russella, w którym angielski uczony skonstruował predykatową i klasową wersję antynomii, opierając się na BS, Frege uświadomił sobie, że jego prawo piąte, niezbędne w definiowaniu liczby, prowadzi do antynomii. Wtedy dokonał dramatycznego wyznania:

Rzecz jest tym poważniejsza, że wraz z usunięciem mego prawa piątego wydaje się tonąć nie tylko podstawa mojej arytmetyki, lecz także jedyna możliwa podstawa arytmetyki w ogóle<sup>11</sup>.

<sup>9</sup> Internationaler Mathematiker-Kongress, Heidelberg, 8–13.08.1904. Zob. D. HILBERT: *Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik*. In: *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*. Hrsg. A. KRAZER. Leipzig, Teubner, 1905. <https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1904/ICM1904.ocr.pdf> [dostęp: 14.02.2018], s. 174–185.

<sup>10</sup> Frege an Russell, 9.06.1912. WB, s. 252; International Congress of Mathematicians, Cambridge 22–28.08.1912.

<sup>11</sup> Frege an Russell, 22.06.1902. WB, s. 213. Por. z tłumaczeniem Romana MURAWSKIEGO: G. FREGE: *List do B. Russella*. W: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*. Wybór i oprac. R. MURAWSKI. Poznań, Wydawnictwo UAM, 1986, s. 204.

Temat antynomii będzie wielokrotnie powracał w korespondencji, ale nie jest jedynym tam dyskutowanym problemem logiczno-matematycznym, o czym w dalszej części pracy. Wspomniane dwutomowe, najważniejsze dzieło Fregego, czyli GG, jest szczególnie znaczące dla badanej tu korespondencji, ponieważ zostało opublikowane w latach 1893 i 1903, a listy powstały w latach 1891–1912.

Plan monografii przedstawia się następująco.

Rozdział pierwszy, *Zagadnienia wstępne*, to krótkie omówienie tych wątków filozoficznych, do których Frege nawiązuje w swojej korespondencji, oraz prezentacja notacji logicznej, jaką stosowali Frege, Peano i Russell. Filozofia Fregego jest precyzyjnie przedstawiona w jego głównym dziele, GG, dlatego przede wszystkim do niego będę się odwoływać. Śledzenie rozwoju symbolizmu logiki matematycznej Peana i Russella nie jest moim celem, toteż przedstawiam jedynie uproszczone podstawy tej symboliki, umożliwiające zapoznanie się z treścią korespondencji z Fregem.

Kolejność trzech następnych rozdziałów odpowiada historycznemu następstwu pisanych listów. W każdym z tych rozdziałów (Giuseppe Peano, David Hilbert, Bertrand Russell) wymieniam zachowane listy, przedstawiam wzajemną znajomość tekstów korespondentów i odpowiedź na pytanie, czy cytowali się wzajemnie. Następnie szczegółowo omawiam wybrane tematy dyskutowane w owych listach. Każdy z tych trzech rozdziałów zamykam tabelarycznym uporządkowaniem czasowym związków danego korespondenta z Fregem.

Rozdział drugi poświęcony jest korespondencji Fregego z Peanem. Czas ich korespondencji, lata 1891–1903, to okres pracy nad ich najważniejszymi dziełami, można powiedzieć „złoty” okres twórczości naukowej nie tylko Fregego, lecz także Peana. W tym samym czasie Peano i Frege korespondowali też z Russellem<sup>12</sup>. Szczegółowo omówię dyskusję Fregego z Peanem nad symbolizmem logicznym i liczbą terminów (lub znaków czy symboli) pierwotnych (czyli niedefiniowalnych), zapisem i rozumieniem kwantyfikatorów oraz różnicą między zdaniem ogólnym a szczegółowym, porównam zapisy poszczególnych formuł logicznych w logice Fregego i Peana, zreferuję ich dyskusję nad konkretnymi definicjami operacji matematycznych, jak również warunkami, jakie powinny spełniać poprawne definicje.

---

<sup>12</sup> H.C. KENNEDY: *Nine Letters from Giuseppe Peano to Bertrand Russell*. „Journal of the History of Philosophy” 1975, vol. 13, no. 2, s. 205–220; też w: IDEM: *Twelve Articles on Giuseppe Peano*. San Francisco, Peremptory Publications, 2002, s. 68–90.

Następnie przedstawię korespondencję z Hilbertem. Do bardziej szczegółowej prezentacji wybrałam ich dyskusję nad koncepcją i strukturą systemu geometrii, rozumieniem aksjomatu oraz jego rolą w systemie geometrii, niesprzecznością i niezależnością aksjomatów, odmiennym rozumieniem frazy *es gibt* („istnieje”), a także oczekiwaniami wobec symbolizmu logicznego.

Jako ostatnią przedstawię korespondencję Fregego z Russellem, która jest najobszerniejszą, najciekawszą i najtrudniejszą merytorycznie częścią listów zebranych Fregego. Rozpocznę od przedstawienia najważniejszego tematu całego WB, jakim jest możliwość skonstruowania antynomii opartej na logice Fregego. Zwrócę także uwagę na inne sformułowania antynomii podane przez Russella i Fregego, na analizy tych wariantów, kontrowersje dotyczące rozumienia klasy, poszukiwania podstawowej formy funkcji i maksymalnie szerokie rozumienie jej dziedziny, na różnorodne próby wyeliminowania antynomii w systemie Fregego oraz na jego argumenty przemawiające za koniecznością posługiwania się odróżnieniem sensu od znaczenia wyrażeń językowych.

Drugoplanowym zadaniem monografii jest pokazanie historycznego tła dyskusji prowadzonych w listach. Przełom dziewiętnastego i dwudziestego wieku był dla matematyki, logiki i filozofii czasem wielkich poszukiwań i budowy nowych paradygmatów uprawiania tych dziedzin, dlatego też w monografii zamieściłam kopie oryginalnych zapisów, między innymi z tego powodu, że nie brakuje badaczy intensywnie pracujących nad historyczną notacją logiczną<sup>13</sup>.

W bibliografii podmiotowej umieściłam tylko podstawowe dzieła Fregego, Peana, Hilberta i Russella, a w bibliografii przedmiotowej – inne pozycje przywoływane w przypisach. Z całej bogatej literatury dotyczącej dorobku Fregego i porównania go z Peanem, Hilbertem oraz Russellem odnoszę się do pozycji, które uznałam za kluczowe. Niestety, pomimo obszernej literatury dotyczącej osiągnięć Fregego, Peana, Hilberta i Russella rzadko powraca się do ich związków (w szczególności w ujęciu historycznym), chociaż ich wzajemne inspiracje i wiele wspólnych celów badawczych są

---

<sup>13</sup> W Tallinn University of Technology (Estonia) w 2015 roku zostało zorganizowane seminarium edukacyjne pod nazwą *History and Philosophy of Logic Notations, Tallinn, 1–2 August 2015*, podczas którego specjaliści z całego świata dawali wyraz żywemu zainteresowaniu zapomnianymi notacjami logicznymi, badanymi dziś między innymi ze względu na ich znaczenie dla programowania. Niektóre referaty zostały opublikowane w numerze tematycznym czasopisma „History and Philosophy of Logic” 2018, vol. 39, iss. 1: *History and Philosophy of Logical Notation*.

oczywiste. Nikt nie kwestionuje dziś wpływu Peana i Fregego na logikę Russella–Whiteheada, a w szczególności na ich notację logiczną. Zamierzam bardziej skoncentrować się na słowach przedstawionych tu matematyków, a nie na interpretacjach ich dorobku. Tytułem wstępu wspomnę także o wielkim renesansie zainteresowania logiką Fregego i wprowadzonej przez niego notacji logicznej, o czym świadczą trzecie niemieckie wydanie GG<sup>14</sup>, angielskie wydanie tej publikacji<sup>15</sup> oraz warte uwagi książki poświęcone logice Fregego<sup>16</sup>.

Początkowo planowałam napisać monografię dotyczącą całej korespondencji Fregego. Rozpoczęłam od pracy nad listami poruszającymi tematykę związaną z moją wcześniejszą rozprawą *Gottloba Fregego koncepcja analizy filozoficznej*<sup>17</sup>. Zebrany materiał dotyczący korespondencji Fregego z Peanem, Hilbertem i Russellem okazał się jednak nieoczekiwanie wystarczająco bogaty do przygotowania pracy omawiającej problemy poruszane w ich listach.

Chcę bardzo serdecznie podziękować wszystkim, którzy służyli mi pomocą w trakcie pisania tej monografii.

Dziękuję uczestnikom seminarium z historii matematyki, które odbywają się w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego od roku akademickiego 2008/2009, uczestnikom corocznych konferencji z historii logiki, organizowanych przez Instytut Filozofii Uniwersytetu Jagiellońskiego, oraz uczestnikom konferencji z filozofii matematyki i informatyki, organizowanych przez Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza. Tam poddawałam dyskusji referaty dotyczące omawianej tu korespondencji.

Wiele zawdzięczam moim zagranicznym konsultantom: Profesorowi Gottfiedowi Gabrielowi z Niemiec, Profesor Patrycji Blanchette ze Stanów

<sup>14</sup> G. FREGE: *Grundgesetze der Arithmetik – Begriffsschriftlich abgeleitet*. Bde. 1, 2. In moderne Formelnotation transkribiert und mit einem ausführlichen Sachregister versehen von T. MÜLLER, B. SCHRÖDER und R. STUHLMANN-LAEISZ. Paderborn, Mentis, 2009.

<sup>15</sup> G. FREGE: *Basic Laws of Arithmetic. Derived Using Concept-script*. Trans., eds. P.A. EBERT, M. ROSSBERG, C. WRIGHT. R.T. COOK: *Appendix*. Oxford, Oxford University Press, 2013.

<sup>16</sup> Wspomnę tu choćby następujące publikacje: P. BLANCHETTE: *Frege's Conception of Logic*. Oxford, Oxford University Press, 2012; R.G. HECK, Jr: *Frege's Theorem*. Oxford, Clarendon Press, 2011; G. LANDINI: *Frege's Notations. What They Are and How They Mean*. New York, Palgrave Macmillan, 2012; *Essays on Frege's Basic Laws of Arithmetic*. Eds. M. ROSSBERG, Ph.A. EBERT. Oxford, Oxford University Press, 2019.

<sup>17</sup> G. BESLER: *Gottloba Fregego koncepcja analizy filozoficznej*. Katowice, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, 2010.

Zjednoczonych, Doktorowi Philipowi Ebertowi oraz Profesorowi Peterowi Sullivanowi ze Szkocji.

W przygotowaniu tej monografii bardzo pomocne okazały moje dwa pobyty w Stirling University (Szkocja) w latach 2017 i 2018, gdzie mogłam poddać dyskusji niektóre fragmenty, skonsultować wątpliwości i korzystać ze zbiorów bibliotecznych. Dodam, że mój drugi pobyt w całości sfinansowała fundacja The Bednarowski Trust, za co serdecznie dziękuję.

Słowa podziękowania kieruję także do recenzentów tej monografii: Profesora Jerzego Pogonowskiego oraz Księdza Profesora Jerzego Dada-czyńskiego, a za koleżeńską recenzję dziękuję Profesorowi Eugeniuszowi Wojciechowskiemu. Sugerowane poprawki, uzupełnienia i komentarze przemyślałam i w zdecydowanej większości wprowadziłam.

Wyrażam wdzięczność moim tłumaczom fragmentów z łaciny, włoskiego, francuskiego i ze staroniemieckiego: Elżbiecie Augustyniak, Lidii Obojskiej, Marcie Ples-Bęben, Agnieszce Szelejewskiej oraz teściowi Józefowi Beslerowi.

W szczególności dziękuję mojej wyrozumiałej i wspomagającej mnie Rodzinie.

Gabriela Besler

**“We followed the same or similar lines of thought.”  
The subject of logical correspondence between Gottlob Frege,  
Giuseppe Peano, David Hilbert, and Bertrand Russell**

Summary

The book *“We followed the same or similar lines of thought.” The subject of logical correspondence between Gottlob Frege, Giuseppe Peano, David Hilbert, and Bertrand Russell* consists of four chapters, Preface and Conclusion, Bibliography, Appendix (all the discovered letters of Frege set in a chronological order), and subject and name indices.

Chapter one, entitled “Introductory Issues,” discusses Frege’s fundamental philosophical-semantic assumptions: his logicism (inspired by Leibniz’s idea of algebra based on logic), differentiation of sense from reference [*Bedeutung*] of the linguistic expressions, adequate and disjunctive division of the universum into functions (whose particular type are concepts) and function’s arguments, that is, objects. Apart from that, the chapter also discusses Frege, Peano, and Russell’s foundation for logical notation.

Chapters two, three, and four have been devoted to Frege’s correspondence with Peano, Hilbert, and Russell respectively. Each of those chapters has the same structure: a general introduction to a given correspondence, a presentation of the correspondents’ familiarity with each other’s texts, as well as their citings, an enumeration of the extant letters, and a catalogue of the investigated subjects. After that, themes pertinent to a particular correspondence have been discussed in further sections of those chapters. The chapters end with a calendar of Frege’s cooperation with a given correspondent.

Chapter two, “Correspondence with Giuseppe Peano,” provides an analysis of the Frege and Peano’s discussion of their logical symbolisms and a number of assumed primitive (i.e., undefinable) terms (signs or symbols). Further, it contains Frege’s and Peano’s records (and understanding) of quantifiers, as well as the related difference between universal and existential sentences. Also, a comparison of records of particular logical formulas from the logic of Frege with the logical formulas of Peano have been provided in this chapter. A concluding theme is the discussion over certain definitions of mathematical operations and conditions that proper definitions should comply with.

Chapter three, “Correspondence with David Hilbert,” comprises an account of an epistolary discussion of Frege with Hilbert, which concerns Hilbert’s book *Grundlagen der Geometrie* and symbolism in mathematics. It contains a controversy over the concept of geometry (geometry based on spatial intuition or an abstract system with no interpretation), the structure of its system, the understanding of an axiom and its role in the system of geometry (the axiom is always a true fundamental fact of intuition or a definition of primitive concepts), consistency and independence of axioms, different understanding of the phrase *es gibt* (there is) and expectations as to the logical symbolism.

Chapter four, “Correspondence with Bertrand Russell,” delineates Frege’s correspondence with Russell. It is most voluminous, most interesting, and substantially most difficult part of Frege’s collected letters. In his first letter to Frege, Russell – referring to Frege’s first book *Begriffsschrift* – formulated the difficulty that led to antinomy. In a reply, Frege related the difficulty to *Grundgesetze der Arithmetik* and discovered the possibility of constructing the antinomy in his own system of logic, which was to enable to define basic terms of the arithmetic of natural numbers and thus lay grounds for arithmetic based on logic. What is more, other formulations of the antinomy put forth by Russell and Frege, the controversy over understanding of the class, a search for fundamental form of a function, and a profound understanding of its domain, various forms of eliminating the antinomy in Frege’s system, as well as Frege’s arguments for the necessity to apply the differentiation of sense form reference in linguistic expressions.

In the Appendix, the reader will find a chronological list of all the hitherto discovered scientific letters by Frege.

Primary sources contain only basic works by Frege, Peano, Hilbert, and Russell, while literature on the subject – other sources that appeared in the footnotes. From all the extensive literary output of Frege as well as a comparison with the abovementioned, I limit myself to only those references that I consider crucial.



Gabriela Besler

## **„Wir sind dieselben oder ähnliche Gedankenwege gegangen“. Thematik der logischen Korrespondenz Gottlob Freges mit Giuseppe Peano, David Hilbert und Bertrand Russell**

### Zusammenfassung

Das vorliegende Buch besteht aus vier Kapiteln, Einleitung, Abschluss, Bibliografie, Appendix und Sach- und Personenregister.

Im ersten Kapitel Einleitende Probleme werden die von Frege aufgestellten grundlegenden philosophisch-semanticen Behauptungen erörtert: sein Logizismus (inspiriert von Leibniz'schen Idee, Algebra auf Logik zu gründen), die Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung der sprachlichen Phrasen, adäquate und disjunktive Unterscheidung des Universums in Funktionen (deren Fall Begriffe sind) und Argumente dieser Funktionen, d.i. Gegenstände. An der Stelle werden überdies die Grundlagen der logischen Notation von Frege, Peano und Russell besprochen.

Drei weitere Kapitel (2-4) sind der Reihe nach dem Briefwechsel zwischen Frege, Peano, Hilbert und Russell gewidmet. Jedes von ihnen hat dieselbe Struktur: allgemeine Einführung in bestimmte Korrespondenz, die Darstellung der gegenseitigen Kenntnis von den Texten einzelner Briefschreiber und gegenseitiges Zitieren, die Aufzählung der erhalten gebliebenen Briefe und Zusammenfassung deren Thematik. In aufeinanderfolgenden Abschnitten jedes einzelnen Kapitels werden wichtigste Schwerpunkte der bestimmten Korrespondenz berührt. Jedes Kapitel ist mit der Zeittafel der Zusammenarbeit Freges mit dem bestimmten Briefschreibers versehen.

Das zweite Kapitel Die Korrespondenz mit Giuseppe Peano schildert die Diskussion zwischen Frege und Peano über logische Symbole und die angenommenen Urzeichen (d.h. undefinierbaren). Geschildert werden die von Frege und Peano gemachten Aufzeichnungen der Quantoren und der damit verbundene Unterschied zwischen allgemeinen und partikulären Urteile (Allaussagen und Existenzaussagen). Verglichen werden hier auch die Schreibweisen von den einzelnen logischen Formeln Peanos Logik zufolge. Das Kapitel endet mit der Diskussion über konkrete Definitionen mathematischer Operationen und über Voraussetzungen für richtige Definitionen.

Das dritte Kapitel Die Korrespondenz mit David Hilbert berichtet über briefliche Diskussion zwischen Frege und Hilbert um Hilberts Buch Grundlagen der Geometrie und um Symbolismus in der Mathematik. Geschildert werden hier alle Meinungsverschiedenheiten über Konzeption der Geometrie (die auf Raumschauung gründende Geometrie oder abstraktes nicht interpretierbares System), einzelne Strukturen des geometrischen Systems, Axiom und dessen Rolle im System der Geometrie (ein Axiom ist immer eine wahre Grundtatsache der Anschauung oder eine Definition von Urbegriffen), Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Axiome, unterschiedliche Auffassung der Phrase es gibt als auch die an logischen Symbolismus gestellten Erwartungen.

Das vierte Kapitel Die Korrespondenz mit Bertrand Russell schildert den von Frege mit Russell geführten Briefwechsel, der den größten, interessantesten und sachlich schwierigsten Teil der gesammelten Briefe Freges darstellt. In seinem ersten Brief an Frege formulierte Russell in Bezug auf Freges Buch Begriffsschrift die zum Widerspruch führende Schwierigkeit. In Beantwortung des Briefes schrieb Frege die merkliche Schwierigkeit den Grundgesetzen der Arithmetik zu und entdeckte einen Widerspruch in der Grundlage seines eigenen logischen Systems, das die Hauptbegriffe der Arithmetik von natürlichen Zahlen zu definieren und auf solche Weise Arithmetik auf die Logik zu gründen möglich machen sollte. Die Verfasserin beachtet überdies: andere von Russell und Frege geprägte Formulierung des Widerspruchs, die Meinungsverschiedenheiten über den Sinngehalt der Klasse, die Suche nach einer grundlegenden Form der Funktion und möglichst umfangreiches Verstehen deren Bereichs, verschiedene Bemühungen, den Widerspruch im System Freges und seine Argumente für den Zwang, den Sinn von der Bedeutung der sprachlichen Phrasen zu unterscheiden, zu eliminieren.

Im Appendix werden alle bisher gefundenen wissenschaftlichen Briefe Freges in chronologischer Ordnung dargestellt.

In Literaturverzeichnis werden lediglich grundlegende Werke Freges, Peanos, Hilberts und Russells und in Sekundärliteratur dagegen andere in Fußnoten genannten Werke verzeichnet. Aus umfangreicher Literatur zum Freges Werk wurden im vorliegenden Buch nur die von seiner Verfasserin gewählten Positionen ausgenutzt.



Redaktor    Małgorzata Pogódek  
Projektant okładki    Magdalena Pache  
Redaktor techniczny    Małgorzata Pleśniar  
Korektor    Joanna Zwierzyńska  
Łamanie    Beata Łojan

Copyright © 2019 by  
Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego  
Wszelkie prawa zastrzeżone

**ISSN 0208-6336**  
**ISBN 978-83-226-3542-1**  
(wersja drukowana)  
**ISBN 978-83-226-3543-8**  
(wersja elektroniczna)

Wydawca  
**Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego**  
**ul. Bankowa 12B, 40-007 Katowice**  
[www.wydawnictwo.us.edu.pl](http://www.wydawnictwo.us.edu.pl)  
e-mail: [wydawus@us.edu.pl](mailto:wydawus@us.edu.pl)

---

Wydanie I. Ark. druk. 12,25. Ark. wyd. 13,0.  
Papier Alto 90 g vol. 1.5 Cena 34,90 zł (w tym VAT)

---

Druk i oprawa: Volumina.pl Daniel Krzanowski  
ul. Księcia Witolda 7-9, 71-063 Szczecin